Théorie algorithmique des graphes aléatoires
Application au problème de la bissection

Yann Verhoeven

Rapport de stage de DEA

sous la direction de M. Fernandez De La Vega

Table des matières

Introduction

La théorie des graphes aléatoires a été fondée par Erdös et Rényi [15, 16]. Cette théorie fait suite à la découverte faite par Erdös [12, 13, 14]que les méthodes probabilistes pouvaient résoudre de nombreux problèmes en théorie des graphes et dans d'autres domaines des mathématiques.

Ce mémoire est consacré au problème de la bissection dans les graphes aléatoires. Il s'agit de partitionner l'ensemble des sommets d'un graphe en deux sous-ensembles de même taille, de telle manière que le nombre d'arêtes entre ces deux sous-ensembles soit minimum.

Afin d'étudier ce problème, nous allons tout d'abord présenter dans le chapitre 1 quelques notions et méthodes de la théorie des graphes aléatoires. Ensuite nous exposerons dans le chapitre 2 quelques résultats de la théorie algorithmique des graphes aléatoires, nous entendons par là l'analyse d'algorithmes sur des graphes aléatoires. Ces résultats porteront principalement sur les problèmes de la bissection de graphe et l'affectation.

Les meilleurs résultats sur ces problèmes ont été jusqu'ici obtenus grâce à une méthode tirée de la physique théorique: la méthode des spin glasses. Nous avons donc jugé utile de présenter cette méthode dans le chapitre 3 avec les principes généraux de l'utilisation de méthode de physique statistique pour des problèmes d'optimisation. Toutefois, du fait de la difficulté de la théorie ainsi que du manque de justification mathématique (défaut reconnu par les physiciens eux mêmes, on pourra voir à ce propos le livre de Mézard, Parisi et Viraroso [26]), nous nous sommes limités aux lignes générales de la méthode.

Enfin, nous serons amenés, dans le chapitre 4 à exposer des résultats obtenus par nous même durant le stage sur le problème de la bissection ainsi que sur celui de la coupe maximum, ces deux problèmes étant liés dans le cas aléatoire comme nous pourront le voir. On donne en particulier des bornes inférieures et supérieures sur la valeur minimum d'une bissection, la borne supèrieure etant obtenue par l'analyse d'un algorithme de type glouton. Ces résultats sont moins précis que ce que donnent la méthode des spin glasses, mais ils sont par contre parfaitement rigoureux.

Chapitre 1

Présentation des graphes aléatoires

1.1 Introduction

1.1.1 Notations

Soient m et n des entiers.On note $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ l'ensemble des n sommets et E_n l'ensemble des arêtes non orientées du graphe complet K_n.
Un graphe G est défini par une paire $(V(G), E(G))$ d'ensembles de sommets et d'arêtes. Le nombre n de sommets est l'*ordre* de G, et le nombre d'arêtes m est la *taille* de G.
On notera Ω_n l'ensemble de tous les graphes d'ordre n.

1.1.2 Généralités

Considérons un graphe G et l'ensemble $V(G)$ de n sommets. Dans un tel graphe, placer une arête revient à choisir une paire de sommets et il y a $\binom{n}{2}$ possibilités. Il y a donc dans ce graphe $\binom{n}{2}$ arêtes différentes possibles. Ainsi, on a $\binom{\binom{n}{2}}{q}$ graphes différents d'ordre n et de taille q. En effet, pour les obtenir il faut placer q arêtes dans $\binom{n}{2}$ emplacements possibles. D'où le résultat.

On va maintenant définir ce qu'est une fonction de graphe:

Définition 1.1 *Soient G et G' deux graphes. G et G' sont dits isomorphes s'il existe une bijection entre les sommets de G et ceux de G' qui conserve les arêtes.*

Une fonction de graphe est un *isomorphisme* si la fonction d'arête et la fonction de sommets sont toutes les deux bijectives. Deux graphes G et G' sont dits *isomorphes* si il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre. On notera alors $G \simeq G'$.

1.1.3 Graphes aléatoires

On introduit ici les deux modèles de graphes aléatoires qui seront utilisés dans la suite. Ces deux modèles, bien qu'étant étroitement liés comme on le verra par la suite, permettent de montrer des choses différentes. Ces deux modèles seront appelés *modèle A* et *modèle B.*

Modèle A

Soit p tel que $0 < p < 1$ et $\Omega_{n,p}$ l'espace contenant tous les graphes d'ordre n dont chaque arête est choisie indépendamment avec une probabilité p. Soit $G_{n,p}$ un élément de $\Omega_{n,p}$ contenant q arêtes, la probabilité d'apparition de $G_{n,p}$ est alors:

$$\Pr(G_{n,p}) = p^q(1-p)^{\binom{n}{2}-q}$$

Lorsque l'on voudra insister sur le fait que la probabilité (respectivement l'espérance) est prise dans $\Omega_{n,p}$, on la notera $\Pr_p$ (respectivement E_p).

Afin de vérifier que l'on a bien défini une probabilité, il faut montrer que $\Pr(\Omega_{n,p}) = 1$ et que Pr est une fonction additive. Pour cela on va calculer le cardinal de $\Omega_{n,p}$ grâce à des arguments de dénombrement. On considère des graphes non orientés donc ils contiennent $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes, chacune pouvant soit exister, soit ne pas exister. On en déduit:

$$|\Omega_{n,p}| = 2^{\binom{n}{2}}$$

D'autre part, sachant qu'il y a $\binom{\binom{n}{2}}{q}$ graphes avec exactement q arêtes, on a

$$\Pr(\Omega_{n,p}) = \sum_{q=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{q} p^q(1-p)^{\binom{n}{2}-q}$$

La formule du binôme permet alors d'affirmer que $\Pr(\Omega_{n,p}) = 1$. De plus, l'additivité de Pr etant triviale, ainsi on a bien défini une probabilité.

On peut imaginer ce modèle en considérant tout d'abord n sommets avec $\binom{n}{2}$ emplacements libres pour des arêtes. On procède par étapes et à chaque fois l'arête apparait avec la probabilité p.
On considèrera souvent ce modèle avec $p = p(n)$, p fonction du nombre de sommets.

Modèle B

Soit M un entier tel que $0 < M < \binom{n}{2}$ et $\Omega_{n,M}$ l'espace de probabilité contenant tous les graphes d'ordre n et de taille M. La probabilité d'un tel graphe est alors:

$$\Pr(G_{n,M}) = \binom{\binom{n}{2}}{M}^{-1}$$

De même que précédemment, lorsque l'on voudra préciser que l'on travaille dans ce modèle, on notera la probabilité $\Pr_M$ et l'espérance E_M.

Le nombre total de graphes avec n sommets est $\binom{n}{2}$, $\Omega_{n,M}$ ne contient que ceux qui ont M arêtes, son cardinal est donc:

$$|\Omega_{n,M}| = \binom{\binom{n}{2}}{M}$$

On voit ainsi que l'on a bien défini une probabilité.

1.2 Propriété d'un graphe

On va maintenant définir la notion de propriété d'un graphe. Pour cela, soit Q un sous-ensemble de Ω_n et soient G et H deux éléments de Ω_n. $G \in Q$ signifie G possède la propriété Q,

Définition 1.2 *Q est une* propriété *des graphes d'ordre n si, $G \in Q$ et $G \simeq H$ impliquent $H \in Q$.*

On va avoir besoin de caractériser les propriétés. Considérons F, G et H, trois éléments de Ω_n. On a alors les définitions suivantes:

Définition 1.3 *Une propriété Q est dite* monotone croissante *si, $G \in Q$ et $G \subset H$ impliquent $H \in Q$.*

Définition 1.4 *Une propriété Q est dite* convexe *si, lorsque l'on a $F \subset G \subset H$, $F \in Q$ et $H \in Q$, alors $G \in Q$.*

De plus, on peut définir pour toute propriété Q, la quantité $\Pr_M(Q)$ qui est la probabilité pour qu'un graphe de $\Omega_{n,M}$ appartienne à Q et $\Pr_p(Q)$ est la probabilité pour qu'un graphe de $\Omega_{n,p}$ appartienne à Q. Lorsque le modèle de graphe n'aura pas à être précisé, on pourra noter simplement $\Pr(Q)$.

Quel que soit le modèle de graphes aléatoires choisi, on dira que presque tout graphe de ce modèle a une certaine propriété Q si $\Pr(Q) \to 1$ quand $n \to \infty$.

1.3 Bien fondé des notations

On va voir ici que la notion de croissance monotone correspond bien avec l'intuition que l'on peut en avoir.

Théorème 1.1 *Soit Q une propriété monotone croissante, M_1 et M_2 tels que $0 \leq M_1 < M_2 \leq \binom{n}{2}$ et p_1 et p_2 tels que $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$. Alors*

$$\Pr_{M_1}(Q) \leq \Pr_{M_2}(Q) \quad et \quad \Pr_{p_1}(Q) \leq \Pr_{p_2}(Q)$$

preuve:

(i) On choisit les M_2 arêtes une par une . Le graphe obtenu aura certainement la propriété Q si legraphe formé par les M_1 premières arêtes vérifie la propriété.

(ii) On pose $p = (p_2 - p_1)(1 - p_1)$. On choisit indépendamment $G_1 \subset \Omega_{n,p_1}$ et $G \subset \Omega_{n,p}$, et on pose $G_2 = G_1 \cup G$. Les arêtes de G_2 ont été choisies indépendamment avec probabilité $p_1 + p - P_1 p = p_2$ donc $G_2 \subset \Omega_{n,p_2}$. Q étant monotone croissante, si G_1 a la propriété Q alors G_2 l'a aussi, d'où $\Pr_{p_1}(Q) \leq \Pr_{p_2}(Q)$. □

1.4 Relation entre les modèles A et B

On va maintenant montrer que les modèles A et B sont pour ainsi dire équivalents sous les hypothèses suivantes:

Hypothèses:

1. on prend $p = p(n)$, et $0 < p < 1$. p est la probabilité d'une arête.
2. il faut $pn^2 \to \infty$ et $(1-p)n^2 \to \infty$, cela permet que tous les graphes aient des arêtes et des non arêtes. En effet, pn^2 et $(1-p)n^2$ correspondent respectivement aux espérances du nombre d'arêtes et du nombre de non arêtes.

On peut alors énoncer le théorème suivant:

Théorème 1.2 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de graphes d'ordre n avec la propriété Q.*

(i) Soit $\epsilon > 0$ fixé. On prend M=M(n) tel que:

$$(1-\epsilon)p\binom{n}{2} < M < (1+\epsilon)p\binom{n}{2}$$

et $Pr(\mathcal{A}) \to 1$ dans le modèle B (càd presque tout graphe a la propriété Q). Alors dans le modèle A, presque tout graphe a la propriété Q.

(ii) Si $\mathcal{A}$ est convexe et si on pose $M = \lfloor p\binom{n}{2} \rfloor$, alors presque tout graphe a la propriété Q dans le modèle B.

1.5 Méthode du premier moment

Nous allons introduire maintenant une méthode de preuve qui sera employée par la suite, il s'agit de la *méthode du premier moment*. Elle sera ici employée pour des démonstrations sur les graphes mais on pourrait imaginer son emploi dans des cas plus généraux.

Lors de l'application de la méthode probabiliste, pour montrer qu'un graphe muni d'une certaine propriété existe, on définit un espace de probabilité convenable et on montre que la propriété désirée existe dans cet espace avec une probabilité non nulle. Afin d'obtenir un tel résultat, on utilise la *méthode du premier moment.* Pour cela, on introduit une variable aléatoire qui prendra la valeur 1 lorsque le graphe a la propriété qui nous interesse et 0 sinon. On calcule alors l'espérance de cette variable. Si cette espérance est non nulle, c'est que la variable aléatoire prend des valeurs non nulles et ainsi, on peut montrer la présence de la propriété.

On va illustrer la méthode par un exemple qui est une minoration du nombre de Ramsey $R(k,k)$. Pour cela on a besoin de quelques définitions. Pour tout entier n, on notera K_n le graphe complet à n sommets.

Définition 1.5 *Le* nombre de Ramsey $R(k,l)$ *est le plus petit entier n tel que dans tout 2-coloriage des arêtes de K_n, en rouge et bleu par exemple, il y ait un graphe complet K_k rouge (toutes ses arêtes sont coloriées en rouge), ou bien un graphe complet K_l bleu.*

Ramsey [28] a montré que pour tous les entiers k et l, le nombre $R(k,l)$ est fini.

Afin d'illustrer la méthode du premier moment, on va maintenant exhiber une borne inférieure pour les nombres de Ramsey diagonaux, c'est-à-dire $R(n,n)$.

Théorème 1.3 *Pour tout entier n,*

$$R(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

preuve: Soit un 2-coloriage aléatoire des arêtes de K_n obtenu en coloriant chaque arête indépendamment en rouge ou en bleu, chaque couleur etant équiprobable.Pour tout ensemble R de k sommets, on appelle X_R la variable aléatoire qui vaut 1 si le sous-graphe induit de K_n sur R est monochromatique dans le coloriage, et 0 sinon. On pose alors $X = \sum X_R$, en sommant sur tous les R. On calcule l'éspérance, la probabilité étant prise sur tous les 2-coloriages. La linéarité de l'espérance permet d'écrire,

$$E[X] = \sum E[X_R] = m \quad \text{avec} \quad m = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

m prend cette valeur car par un argument de comptage on peut affirmer que $\binom{n}{k}$ estexactement le nombre de sous-graphes complets monochromatiques à k éléments dans un graphe complet à n sommets et $2^{1-\binom{k}{2}}$ est l'éspérance de X_R. En effet, il y a k arêtes dans le sous-graphe donc $\binom{k}{2}$ coloriages.

Pour chaque arête, deux couleurs sont possibles donc il y a $2^{\binom{k}{2}}$ coloriages différents de R. Or,

$$X_R = \begin{cases} 1 & \text{si le coloriage de } R \text{ est monochromatique} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et il y a deux coloriages monochromatiques possibles de R, donc $E[X_R] = 2 \times \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$, car chaque coloriage est équiprobable.
Le calcul de l'espérance permet de dire qu'il existe un 2-coloriage pour lequel $X \leq m$, car si pour tout coloriage $X > m$ alors $E[X] > m$. Fixons un tel coloriage. On enlève de K_n un sommet de chaque ensemble monochromatique à k éléments. On a ainsi retiré au plus k sommets (on peut retirer plusieurs fois le même sommet), il reste alors s sommets, avec $s \geq n - m$. Ce coloriage sur s points n'a pas d'ensemble monochromatique à k éléments. Ainsi, par définition de $R(k,k)$, on a $R(k,k) > n - m$. $\square$

On a donc obtenu simplement une borne infèrieure de certains nombres de Ramsey.

Cette méthode permet de faire des preuves existentielles non constructives et sera employée par la suite en particulier dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Algorithmes sur des graphes aléatoires

On va maintenant étudier l'application d'algorithmes sur les graphes aléatoires. En d'autres termes, il s'agit de l'analyse en moyenne des algorithmes de graphe. Nous allons passer en revue ici les principaux résultats de ce domaine introduit par Frieze et McDiarmid [17], en insistant sur le problème de l'affectation ou de nombreuses questions restent ouvertes et sur le problème de la bissection sur lequel nous avons personnellement travaillé.

Dans ce chapitre, un évènement ε_n dépendant de n sera dit apparaitre avec grande probabilité si on a $\Pr[\varepsilon_n] \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

2.1 L'analyse en moyenne

L'étude d'un algorithme en moyenne a l'avantage de supprimer le pessimisme de l'analyse classique du pire des cas. Des problèmes comme celui de trouver un chemin Hamiltonien deviennent souvent solvables. Ainsi, l'ombre de la NP-complètude est moins importante. Bien que les modèles utilisés puissent sembler irréalistes, la même critique est valable en sens inverse pour les preuves de NP-completude qui utilisent des cas pathologiques. D'autre part, les modèles peuvent être proches de ceux utilisés dans les tests empiriques d'algorithmes.

Interessons nous maintenant à quelques résultats obtenus grâce à l'approche en moyenne.

2.1.1 Algorithmes pour les chemin Hamiltoniens

Le problème consistant à trouver le seuil d'existence d'un chemin Hamiltonien dans un graphe aléatoire $G_{n,M}$ a été posé par Erdös et Rényi [16].

Pòsa [27] a donné un élément de réponse en montrant que si $M \geq Kn \log n$, K assez grand, alors $G_{n,M}$ est hamiltonien avec grande probabilité.

On va maintenant noter δ le degré minimum du graphe, et on construit le graphe arête par arête, soit τ_2 le premier instant tel que $\delta \geq 2$. Soit G_{n,τ_2} le graphe ainsi obtenu. Bollobàs [2] a montré le théorème suivant:

Théorème 2.1

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[G_{n,\tau_2} \textit{ est Hamiltonien}] = 1.$$

Angluin et Valiant [1] ont donné une preuve constructive du résultat de Pòsa: ils ont décrit un algorithme aléatoire en $O(n(\log n)^2)$ qui trouve un chemin hamiltonien dans $G_{n,M}$ avec grande probabilité, toujours si $M \geq Kn \log n$, K assez grand. Bollobàs, Fenner and Frieze [4] ont eux décrit un algorithme déterministe HAM qui tourne en temps $O(n^3 \log n)$ et qui satisfait:

Théorème 2.2

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[HAM \textit{ termine sur } G_{n,\tau_2}] = 1 \tag{2.1}$$

HAM est un algorithme procédant par étapes. A l'étape k, on obtient un chemin de longueur k. A l'étape suivante, l'algorithme effectue d'abord une recherche en largeur afin d'étendre le chemin que l'on a déjà.

Bien que HAM ait été construit pour satisfaire 2.1, on a montré qu'il réussissait avec une probabilité $1 - o(2^{-n})$ sur un graphe aléatoire $G_{n,1/2}$ choisi uniformément parmi les graphes dont les sommets sont $\{1, \ldots, n\}$ (on a compté comme succès le cas des graphes qui ne sont pas Hamiltoniens car l'un des sommets a un degré 0 ou 1).

2.1.2 Le problème de l'affectation

Certains résultats existent concernant la résolution de ce problème et en particulier des relations avec le problème du voyageur de commerce *assymétrique* qui vont être abordées maintenant. On va d'abord rappeler le problème de l'affectation puis on va définir le problème du voyageur de commerce assymétrique et enfin exposer des résultats liant ces deux problèmes.

On va désigner le problème de l'affectation par AP. Il s'agit de trouver un couplage parfait de poids minimum dans un graphe bipartite dont les arêtes ont des poids. Une entrée de ce problème est une matrice $n \times n$ notée ici $M = (m_{ij})$, où m_{ij} représente le poids de l'arête entre x_i et y_j, et $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets de "gauche" dans le graphe bipartite, et $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ l'ensemble des sommets de "droite". Le problème AP est alors le suivant: il faut trouver une permutation π de $\{1, \ldots, n\}$ qui minimise $\sum_{i=1}^{n} m_{i,\pi(i)}$ et $AP(M)$ sera la valeur optimale de AP avec M comme entrée.

Le problème du voyageur de commerce assymétrique (que l'on va noter $ATSP$) est de trouver un circuit Hamiltonien de poids minimum dans un graphe orienté dont les arêtes ont un poids. Une entrée de ATSP peut être formalisée par une matrice $n \times n$ qui sera notée $N = (n_{ij})$, où n_{ij} représente le poids de l'arête (ij). Le problème est alors de trouver une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ qui minimise la somme $\sum_{i=1}^{n} n_{ij}$ et telle qu'elle soit formée d'un seul cycle. On notera par $ATSP(N)$ la valeur optimale de N dans le problème $ATSP$.

On remarque que, comme les conditions imposées à la permutation de $ATSP$ sont plus contraignantes que celles imposées à AP, on a $AP(M) \leq ATSP(M)$ (les entrées des deux problèmes ont la même forme). D'autre part, $ATSP$ est NP-dur tandis que AP est solvable en temps $O(n^3)$.

Karp [22] a supposé que les m_{ij} sont distribués uniformément sur [0,1]. Il a prouvé qu'un certain algorithme qu'il appelle *patching algorithm* (algorithme de "rapiéçage") produit une solution proche de l'optimale pour le problème $ATSP$ avec une grande probabilité. Il a en fait montré que la solution donnée par son algorithme permettait d'avoir le théorème suivant:

Théorème 2.3

$$\frac{ATSP(M)}{AP(M)} = 1 - o(1) \quad \textit{avec grande probabilité} \tag{2.2}$$

L'approche adoptée est la suivante:

- On résoud le problème AP pour la matrice M,
- Avec grande probabilité il y a moins de $2 \log n$ cycles dans la permutation optimale, cela est vrai car la permutation correspond à une permutation aléatoire de $\{1, \dots, n\}$,
- On "rapièce"les cycles un par un dans le plus grand cycle, aussi économiquement que possible. Pour "rapiècer" un cycle dans un autre, il faut supprimer une arête de chaque cycle puis ajouter deux arêtes pour en construire un grand.

Le résultat du théorème a été amélioré dans différentes directions par Karp et Steele [23] puis par Dyer et Frieze [11]. Ces derniers montrent que le terme d'erreur dans l'équation 2.2 est $o((\log n)^4/n)$.

Plus récemment, Frieze, Karp et Reed [18] ont considéré une autre distribution pour les m_{ij}. Celle-ci donne plus de poids à l'évènement $m_{ij} = 0$. Ils ont alors prouvé:

Théorème 2.4 *1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles positives. On note $p_n = \Pr[X_n = 0]$ et $w(n) = np_n$. Soit $M = M(n)$ une matrice $n \times n$ dont les termes sont choisis indépendamment avec* *la même distribution que X_n. Si $w(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$ alors $AP(M) = ATSP(M)$.*

2. *Soit $M = M(n)$ une matrice $n \times n$ dont les termes sont choisis indépendamment avec une distribution uniforme sur $\{0, \dots, \lfloor cn \rfloor\}$ où c est une constante positive. Alors, la probabilité de l'évènement $AP(M) \neq ATSP(M)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.*

3. *Soit $M = M(n)$ une matrice $n \times n$ dont les termes sont choisis indépendamment avec une distribution uniforme sur $\{0, \dots, \lfloor c_n n \rfloor\}$ où c_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Alors, la probabilité de l'évènement $AP(M) \neq ATSP(M)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.*

La preuve de la partie 1. du théorème repose sur un algorithme qui transforme la solutin du problème de l'affectation en un chemin en utilisant seulement des arêtes de longueur 0. Avant d'executer une phase d'insertion de cycles, on doit executer une phase qui augmente la taille des plus petits cycles afin que le "rapièçage" soit efficace.

On a donc des résultats concernant le lien entre le problème de l'affectation et celui du voyageur de commerce assymétrique. Toutefois, de nombreux problèmes sont ouverts tel que celui de déterminer la probabilité que $AP(M) = ARTSP(M)$ dans le cas 2. du dernier théorème.

Un autre problème ouvert lié au problème de l'affectation est celui de chercher à déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} E(AP(M))$ lorsque les coefficients de M sont choisit indépendament avec une distribution uniforme sur [0,1].L'existence de la limite est un résultat important de Aldous [8] que nous allons présenter maintenant, après avoir complété nos notations.

notations

Comme précédemment ce problème prend en entrée n tâches, n machines et une matrice $(t_{j,m})$ $n \times n$ à coefficients non négatifs représentant le coût de la tâche j sur la machine m. Une *affectation* est une permutation π de $\{1, \dots, n\}$, indiquant que la tâche j est affectée à la machine $\pi(m)$. L'affectation optimale a le coût $\min_\pi \sum_j t_{j,\pi(j)}$, le minimum étant pris sur toutes les permutations π.

Pour le *problème d'affectation aléatoire*, on définit les $t_{j,m}$ par des variables aléatoires indépendantes de distribution exponentielle ayant une moyenne égale à n:

$$\Pr(t_{j,m} > x) = \exp(-\frac{x}{n}), \quad 0 \ll x < \infty$$

et on va étudier le coût moyen par tâche dans l'affectation optimale, c'est à dire la variable aléatoire suivante:

$$C(n) = \frac{1}{n} \min_{\pi} \sum_{j} t_{j,\pi(j)} \tag{2.3}$$

Traditionnellement on étudie plutôt le coût total de toutes les tâches, ce qui est équivalent à utiliser une distribution exponentielle avec une moyenne égale à 1. Il est aussi courant d'utiliser la distribution uniforme sur $[0,1]$.

Résultats obtenus sur l'affectation

Modeler les coûts par des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées peut sembler éloigné de la réalité mais même dans ce cas, le calcul numérique de $EC(n)$ pose déjà un problème mathématique difficile. Ainsi, les seuls résultats connus jusqu'à récemment étaient les inégalités

$$1 + e^{-1} + \iota \leq \liminf_{n\to\infty} E[C(n)] \leq \limsup_{n\to\infty} EC(n) \leq 2$$

où ι est une petite constante explicite. La borne supérieure est due à Karp [21] et est en fait une amélioration de résultats précédents de Walkup [30] par une technique qui a été ensuite développée par Dyer et al. [9]. La borne inférieure est quant à elle due à Goemans et Kodialam [19].

Le principal résultat de [8] est le suivant:

Théorème 2.5 *Il existe une constante c^* telle que:*

$$E|C(n) - c^*| \to 0 \quad n \to \infty$$

Dans son article, Aldous donne une formule explicite pour $c*$, mais on ne peut pas en déduire de valeur numérique.

Dans la preuve de ce théorème, on utilise entre autre le résultat suivant:

$$\limsup_{n\to\infty} EC(n) < \infty$$

ainsi que des éléments que Walkup [30] utilise pour montrer ce fait.

Dans l'article [8], Aldous définit complètement un nouvel objet qui représente la limite des matrices $n \times n$ de coût quand $n \to \infty$. Cette limite est en fait un arbre infini avec les coûts aléatoires associés aux arêtes. La description formelle d'un tel arbre étant compliquée, elle ne sera pas faite ici mais on peut essayer d'en donner une idée. L'arbre considéré sera un arbre régulier dont le degré sortant r de chaque noeud est fixé au départ. On choisit tout d'abord une tâche aléatoirement que l'on place à la racine de l'arbre. Les extrêmités des branches issues de la racine représentent alors les r machines auquelles la première tâche pourrait être affectée avec un faible coût, chaque branche étant indicée par le coût correspondant. De chaque extrémité sont issues r branches dont les extrémités représentent alors les autres tâches qui peuvent être associées aux machines précédentes, et ainsi de suite. On montre alors que les limites de l'affectation correspondent aux couplages de l'arbre qui vérifient certaines conditions. Ainsi on peut définir une constante c^* comme le minimum de l'espérance du coût de l'affectation de la tâche à la racine jusqu'à sa machine sur tous les couplages satisfaisants dans l'arbre infini. Cette structure permet après un certain travail de montrer le théorème 2.5.

Malgré le fait qu'aucun résultat numérique n'ait été montré pour c^*, il y a eu quelques études sur le sujet. Ainsi, Steele [29] observe qu'un algorithme glouton global aboutit à un couplage non-optimal avec un coût $\sim \log n$. Toutefois une analyse naïve ne tenant pas compte des effets du conditionnement à chaque étape aboutit à $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+1-i)^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$ comme estimation du coût de ce couplage glouton.

Mezard et Parisi [25] ont montré que $c^* = \frac{\pi^2}{6}$ par la méthode controversée des répliques utilisée dans la théorie des *Spin Glasses*. Cette méthode sera exposée plus en avant.

2.2 La bissection de graphe

Nous présentons dans ce paragraphe le problème de la bissection des graphes aléatoires avec les principaux résultats. Nos propres résultats sont exposés dans le chapitre 4

Dans ce problème, l'entrée est un graphe $G = (V(G), E(G))$ à n sommets, n pair. Le problème est alors de trouver une partition de $V(G)$ équilibrée en deux sous-ensembles V_1 et V_2 telle que le nombre d'arêtes entre les sommets de V_1 et de V_2 soit minimum. Le nombre de telles arêtes est appelé la *taille de bissection*. Si on considère ce problème dans le modèle B vu au chapitre 1 alors on montre que les coupes ont environ $M/2$ arêtes, si M est assez grand (tel que $M/n \to \infty$), où M désigne, rappelons le, le nombre total d'arêtes de G. Trouver la taille exacte de la bissection avec grande probabilité est toujours un problème ouvert. Toutefois, on verra plus tard que l'on connait l'espérance de cette taille.

Des résultats positifs ont été obtenus pour des instances “biaisées” (nous reviendrons sur le problème non biaisé dans le chapitre 4). Dans le cas biaisé, on tire uniformément des échantillons de l'ensemble $\mathcal{G}(n, M, b)$ qui contient les graphes dont les sommets sont $\{1, 2, \dots, n\}$, avec M arêtes et dont la taille de bissection est b. L'idée permettant d'arriver à de tels résultats est que si b est plus petit que $M/2$ de manière significative, alors il y aura une unique bissection de taille b et elle sera facile à trouver. Dyer et Frieze [10] ont étudié le cas où $M = \Omega(n^2)$ (cela signifie que $n^2 = O(M)$ et ont montré comment résoudre le problème en temps polynomial en moyenne si $b \leq (1-\epsilon)M/2$ avec $\epsilon > 0$ fixé. L'algorithme repose sur la comparaison des degrés des sommets.

Boppana [5] améliore ces résultats permettant de prendre $M = \Omega(n \log n)$. Soit un graphe G ayant comme sommets $\{1, \ldots, n\}$ et soient $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des vecteurs quelconques. On pose:

$$f_G(\mathbf{d}, x) = \sum_{(i,j) \in E} \frac{1 - x_i x_j}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i^2 - 1)$$

soit S un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$, on définit les x_i comme suit,

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ -1 & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

Dans ce cas, $\frac{1-x_i x_j}{2}$ vaut 1 lorsque $x_i \in S$ et $x_j \in \overline{S}$ (ou bien $x_i \in \overline{S}$ et $x_i \in S$) et 0 sinon. Par contre $d_i(x_i^2 - 1)$ vaut 0 car $x_i \in \{-1, 1\}$. Donc $f_G(\mathbf{d}, x)$ est le nombre d'arêtes dans la coupe $(S, \overline{S})$, quelque soit le vecteur $\mathbf{d}$. Ainsi, en général, $\min_x f_G(\mathbf{d}, x)$ est une borne inférieure de la taille de la bissection. Boppana montre que si

$$0 \leq b \leq M/2 - 5\sqrt{mn \log n}$$

et si on pose $\mathbf{d}^* = \max_{\mathbf{d}} \min_x f_G(\mathbf{d}, x)$ on a $b = f_G(\mathbf{d}^*, x^*) = \min_x f_G(\mathbf{d}^*, x)$ où x^* est la valeur de x dans la bissection optimale. Ce résultat découle logiquement de ce qui précède car la taille de la bissection est bien le minimum de la fonction f_G sur les vecteurs x.

Un article précédent de Bui, Chaudhuri Leighton et Sipser [6] considèrait un modèle similaire de graphes réguliers et appliquait des techniques de flot pour trouver la bissection.

Une autre étude a été faite avec le même modèle, il s'agit de celle de Jerrum et Sorkin [20]. Ils ont montré que les algorithmes de *simulated annealing* (aussi connus sous le nom *d'algorithmes Metropolis*) permettent aussi de résoudre le problème. Toutefois, les conditions sur b et M sont un petit peu plus restrictives que précédemment. Ces résultats sont néanmoins interessants car la méthode de simulated annealing est souvent utilisée dans la pratique, en particulier elle est utilisée dans la théorie des spin glasses que l'on décrit brièvement plus loin.

Chapitre 3

Physique théorique et optimisation combinatoire

Récemment, les physiciens ont appliqué des méthodes de calcul de mécanique statistique à des problèmes d'optimisation. Cette démarche a permis d'obtenir des résultats très interessants comme nous le verrons par la suite. L'analogie entre les deux types de problèmes n'a été exploitée que récemment car les physiciens se sont longtemps interessés principalement au comportement de systèmes homogènes alors que les problèmes d'optimisation sont plutôt inhomogènes. Mais le développement de nouvelles méthodes et de nouveaux concepts en mécanique statistique des systèmes désordonnés ont amené à lier les deux types de problèmes. Un exemple de cette interaction entre la mécanique statistique et les problèmes d'optimisation est celui des Spin glasses de Ising.

3.1 Le problème des Spin Glasses

Les spin glasses sont des substances magnétiques constituée d'éléments ayant chacun une caractéristique appelée spin qui sera codée par un nombre. A l'interieur de la substance, ces éléments exercent entre elles des interactions qui sont soit ferromagnétiques (elles tendent à rendre les spins égaux, on dira aligner les spins), soit antiferromagnétiques (et elles tendent à opposer les spins, on dira antialigner les spins).Dans le modèle, le type de l'interaction est supposé être aléatoire. Les spins qui nous interessent ne peuvent prendre que deux valeurs ± 1, et sont approchés des spins de Ising. Dans ce modèle les spins interagissent et on cherche alors l'état d'équilibre atteint lors de l'immobilisation du système.

Avant d'aborder une formalisation mathématique et afin d'appréhender le problème de façon intuitive, on peut considérer l'exemple ci-après. Dans une tragédie classique, on peut trouver le scénario suivant: il y a un affrontement entre deux groupes de personnes et chacun des personnages doit choisir un camp. De plus, ils ont chacun des sentiments les uns envers les autres qui peuvent être positifs ou bien négatifs (pour plus de simplicité on considèrera que ces sentiments sont réciproques). Ainsi certains sont amis et certains sont ennemis. Si l'on considère 3 de ces personnages, disons A, B et C et si les 3 sont amis, alors il n'y a pas de problème. Si C est l'ennemi de A et de B, on met A et B dans le même camp et C dans celui opposé. Mais si par contre A, B et C se haissent les uns les autres alors deux d'entre eux, qui sont ennemis devront se battre côte à côte contre le 3^{eme} ce qui crée un sentiment de frustration. C'est ce sentiment de frustration que l'on va vouloir minimiser dans la suite.

On va maintenant donner une modélisation mathématique. On considère tout d'abord que le système observé S est constitué de N éléments, $S = 1, \ldots, N$, et qu'à chacun d'entre eux est associée une variable σ_i (un spin) qui peut prendre la valeur $+1$ ou bien la valeur -1. En d'autres termes on a une application $\sigma : S \to +1, -1$ et l'on pose $\sigma_i = \sigma(i)$. On introduit alors pour chaque paire de spins une variable J_{ij} (l'intéraction) qui vaut 1 ou -1 aléatoirement. On cherche à minimiser la fonction suivante:

$$H_J[\sigma] = -\sum_{i>k} J_{ik}\sigma_i\sigma_k \tag{3.1}$$

où σ représente le vecteur dont les coordonnées sont les σ_i. Cette fonction tente de représenter la frustration introduite précédemment. En effet, lorsque $\sigma_i = \sigma_j$, J_{ij} peut valoir 1 et la contribution dans H_J est de $+1$, ce qui diminue la frustration (il y a un signe - dans l'expression de H_J) tandis que si J_{ij} vaut -1, la contribution augmente. Lorsque $\sigma_i \neq \sigma_j$, la contribution est inverse. Donc cette fonction est en effet proche de la frustration.
La fonction H est aussi appelée la fonction de coût ou bien encore le Hamiltonien. Elle représente l'énergie du système.

La détermination des $\{\sigma\} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ minimisant H_J est en général un problème NP-complet.

On peut aussi étudier les propriétés des configurations σ_i qui ont une énergie faible mais non minimale. Les physiciens effectuent une telle étude en donnant à chaque configuration σ la probabilité

$$P_J[\sigma] = \frac{\exp(-\beta H_J[\sigma])}{Z_J}$$

où Z_J est la fonction de partition et est telle que la somme des probabilités est égale à 1:

$$Z_J = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H_J[\sigma]).$$

β est une constante telle que $\beta = \frac{1}{kT}$, où k est la constante de Boltzmann et T est la température absolue.

La probabilité ainsi définie correspond bien à l'objectif envisagé ci-dessus: lorsque H_J est grand la probabilité est faible. Ces notions proviennent de la mécanique statistique, H_J est l'énergie du système et $P_J[\sigma]$ est la distribution de probabilité de Gibbs, elle a été adoptée par les physiciens pour des raisons qui ne seront pas abordées ici car elles sont éloignées des considérations de ce rapport.

Il faut maintenant déterminer la relation entre ce problème des spin glasses et certains problèmes d'optimisation.

3.2 Application aux problèmes d'optimisation

On a vu dans la partie précédente que le problème des spin glasses pouvait finalement se ramener à un problème d'optimisation qui est celui de minimiser un coût. Donc une méthode permettant de résoudre le problème des spin glasses peut aider à résoudre un problème d'optimisation, aussi va-t-on formaliser ce problème en termes de mécanique statistique de façon simple. Pour les physiciens un état minimisant l'énergie est appelé un état stable. On peut de même établir une table de correspondances entre le langage de mécanique statistique et celui de l'optimisation:

PHYSIQUE STATISTIQUE	OPTIMISATION
échantillon	entrée
énergie	fonction de coût
état stable	configuration optimale
énergie minimale	coût minimal

Les problèmes d'optimisation ne se réduisent pas à trouver des algorithmes mais aussi à trouver des propriétés des solutions optimales ou presque optimales. En physique comme en optimisation on considère des entrées qui appartiennent à une certaine classe et distribuées avec une certaine probabilité.

On va maintenant voir comment le point de vue de la physique statistique peut amener des développements intéressants en optimisation. Les exemples qui seront abordés sont des problèmes d'optimisation connus: le couplage, TSP (voyageur de commerce), l'affectation et la bissection de graphe. Il y a dans ces 4 problèmes des éléments communs: une entrée est constituée de N points et on a la matrice des distances entre les points (l_{ij}) (on considère des graphes non orientés donc la matrice des (l_{ij}) est symétrique). Dans les 3 premiers problèmes il s'agit de chercher une permutation qui minimise la longueur (l'énergie dans un langage physicien):

$$E = \sum_i l_{i,\pi(i)}$$

la permutation devant vérifier une des conditions suivantes:

– pour TSP, elle doit être cyclique,

– pour le couplage, elle doit être constituée de cycles de longueur 2, c'est à dire que l'on a $\pi(\pi(i)) = i$ pour tout i, et dans ce cas, l'énergie est le double de la longueur du couplage.

– pour l'affectation, la permutation π est quelconque.

Bien que ces problèmes aient l'air similaires présentés de cette façon, le couplage et l'assignation sont dans P alors que TSP est NP-complet.

Dans la majorité des cas considérés les valeurs des distances l_{ij} sont des variablesaléatoires indépendantes et de même loi. La loi considérée ici sera une distribution uniforme sur [0,1].

Le problème du couplage

Dans tous ces problèmes il est naturel d'introduire les variables n_{ij} qui valent 1 si l'arête ij appartient au couplage et 0 sinon (on a tout de suite $n_{ij} = n_{ji}$). Dans ce cas, la fonction de partition est:

$$Z = \sum_n \prod_{i<j} (T_{ij})^{n_{ij}}$$

avec

$$T_{ij} = \exp(-\beta N l_{ij})$$

qui est le poids de Boltzmann associé à l'arête ij lorsqu'elle existe. La somme est indexée par les familles n_{ij} qui vérifient les contraintes. Dans le cas du couplage il s'agit de

$$n_{ij} = n_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête ij appartient au couplage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{N} n_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq N.$$

la seconde condition étant celle qui permet d'avoir une seule arête par sommet.

La méthode des répliques, qui sera abordée ulterieurement, permet alors de calculer un équivalent asymptotique de la longueur moyenne du couplage optimal:

$$E_M = \frac{\pi^2}{12}$$

Le problème du voyageur de commerce

Ce problème a été étudié par Mézard et Parisi [24] et une approximation du résultat (on n'a pas de résultat exact) est:

$$E_{TSP} = 2,08 \ \pm \ 0,03,$$

On pense avoir calculé ici la longueur optimale du tour du voyageur de commerce à travers N sommets avec des l_{ij} variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément sur [0,1] (il est a noter que l'inégalité triangulaire n'est pas en général satisfaite pour cette distribution).

Le problème de l'affectation

Dans ce cas, les contraintes sur les variables n_{ij} sont:
comme avant:

$$n_{ij} = n_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête ij appartient au couplage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et cette fois,

$$\sum_{j=1}^{N} n_{ij} = 2 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N.$$

Par les mêmes méthodes on trouve que la solution obtenue dans la partie précédente s'applique encore cette fois et permet d'inférer que le poids minimum d'une affectation est asymptotiquement:

$$E_A = 2,08 \ \pm \ 0,03.$$

Partition de graphe

Ce problème est connu comme étant NP-complet et est proche du problème des spin glasses. Une entrée de ce problème est un graphe à N sommets (N est pair) avec des arêtes. On cherche à obtenir une partition de l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles U et D, chacun contenant la moitié des sommets. La fonction de coût cherchera alors à minimiser le nombre d'arêtes entre les sommets de U et ceux de V.

On modélise ce problème grâce à des spin glasses comme suit: chaque point i appartient à l'un des ensembles U où D. On lui associe un spin de Ising σ_i tel que:

$$\sigma_i = \begin{cases} +1 & \text{si } i \in U \\ -1 & \text{si } i \in D. \end{cases}$$

D'autre part, on veut que U et D aient la même taille donc on a la contrainte $\sum_i \sigma_i = 0$.

On considère ensuite la matrice d'adjacence (J_{ij}) du graphe qui est telle que $J_{ij} = J$ si l'arête ij appartient au graphe et $J_{ij} = 0$ sinon. Le coût de la partition est dans ce cas:

$$C = \frac{1}{J} \sum_{i<j} \frac{J_{ij}}{2} (1 - \sigma_i \sigma_j),$$

Cette fonction est bien le coût de la partition car chaque terme de la somme vaut 1 si et seulement si il existe une arête entre σ_i et σ_j et que l'un appartient à U et l'autre à D. Dans les autres cas les termes de la somme valent 0.
C peut encore s'écrire, après développement

$$C = C_0 + \frac{1}{2J} H(\{J_{ij}\}, \{\sigma_i\}),$$

avec $C_0 = (\sum_{i<j} J_{ij})/2J$ qui ne dépend pas des spins et H qui est le Hamiltonien définit par l'équation 3.1 et qui vaut

$$H(\{J_{ij}\}, \{\sigma_i\}) = -\sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j.$$

On a donc abouti à partir du problème initial de bissection de graphe à un problème de physique théorique: maximiser un Hamiltonien.

On considére maintenant comme modèle celui où chaque arête du graphe a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'exister. En appliquant la méthode des répliques (qui sera explicitée par la suite), on trouve comme résultat, lorsque N est grand,

$$C = \frac{N^2}{8} + \frac{N^{\frac{3}{2}}}{2} E_0 + o(N^{\frac{3}{2}}),$$

avec le terme en N^2 qui est la valeur de C_0 et le terme en $N^{\frac{3}{2}}$ qui est la correction due à l'optimisation. E_0 est une constante qui vaut approximativement -0,7633. On a donc, modulo les incertitudes liées à la méthode des répliques, le théorème suivant:

Théorème 3.1 *La bissection équilibrée minimum d'un graphe aléatoire à n sommets et dont chaque arête a une probabilité d'exister de $1/2$, vérifie*

$$C = \frac{n^2}{8} - 0,3816 n^{3/2} + o(n^{3/2})$$

Nous donnerons plus loin par une méthode parfaitement rigoureuse un résultat légerement moins fort.

3.3 Aperçu de la méthode des répliques

On va maintenant donner un aperçu de la méthode des répliques. On considère un système défini comme précédemment dont le Hamiltonien $H_J[\sigma] = -\sum_{i>k} J_{ik}\sigma_i\sigma_k$ dépend de la configuration $\{\sigma\}$ et de variables de contrôle J distribuées selon la loi de probabilité $\Pr[J]$. On peut donc calculer la fonction de partition:

$$Z_J = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H_J[\sigma]).$$

on a alors, par définition, la densité d'énergie libre du système:

$$f_J = -\frac{1}{\beta N} \ln Z_J = -\frac{1}{\beta N} \ln \left[\sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H_J[\sigma]) \right].$$

La signification physique de β est l'inverse de la température. Dans le problème de la bissection on verra que l'on cherche à maximiser un hamiltonien. Il suffit pour cela de prendre β suffisamment petit.

On va chercher à calculer la valeur moyenne de la densité:

$$f = \sum_J \Pr[J] f_J = \overline{f_J}, \tag{3.2}$$

en notant par une barre la moyenne sur toutes les configurations possibles J.

Le calcul de 3.2 n'est pas un calcul classique de mécanique statistique, aussi on introduit une nouvelle façon de calculer qui est la *méthode des répliques*. Cette méthode consiste à calculer la moyenne f (équation 3.2) à partir de la moyenne de la fonction de partition de n répliques distinctes du système initial. On va maintenant introduire quelques notations:

$$Z_n = \overline{\sum_J Pr[J](Z_J)^n} \equiv \overline{(Z_J)^n}$$

$$f_n = -\frac{1}{\beta n N} \ln Z_n$$

On considère maintenant les relations

- $\sum_J \Pr[J] = 1$,
- et $A^n \sim 1 + n \ln(A)$ quand n est proche de 0.

On en déduit alors immédiatement:

$$\lim_{n \to 0} f_n \equiv f_0 = \bar{f}.$$

Toutefois ce passage à la limite n'a pas été jusqu'à maintenant correctement justifié comme le soulignent les physiciens et en particulier Mèzard, Parisi et Viraroso [26].

On voit donc qu'il faut calculer la moyenne de l'énergie libre f_n, et pour cela, il faut tout d'abord calculer $(Z_J)^n$. Or, la puissance n^{ieme} de la fonction de partition d'un système est la même chose que la fonction de partition de n répliques (n'interragissant pas) du même système, ainsi:

$$(Z_J)^n = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \cdots \sum_{\sigma_n} \exp\left(-\sum_{a=1}^{n} \beta H_J[\sigma^a] \right). \tag{3.3}$$

Dans cette formule, les spins ont 2 indices, celui du bas est comme précédemment l'emplacement du spin, tandis que l'indice du haut indique la réplique.

Afin de terminer le calcul, on calcule enfin les deux limites $n \to 0$ et $N \to \infty$.

L'astuce du calcul des répliques est donc constituée des étapes suivantes: on utilise l'équation 3.3 afin de définir la fonction f_n pour tout entier n, on l'étend à une fonction de n sur les réels afin de calculer la fonction $f_0 = \bar{f}$.

Cette méthode permet ainsi de trouver des résultats pour quelques problèmes mais comme elle n'a pas réellement de justification mathématique, il faut rester prudent.

Chapitre 4

Résultats sur la bissection

Dans ce chapitre nous allons nous interesser plus particulièrement au problème de la bissection de graphe. Les résultats présentés sont une correspondance très précise entre la taille minimum d'une d'une bissection et la coupe maximum d'un graphe aléatoire et une borne sur la bissection obtenue au moyen d'un algorithme de type glouton. Avant de présenter ces résultats, nous allons définir de façon formelle les problèmes abordés.

La bissection de graphe

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe et soient X et Y deux parties disjointes de $V(G)$. On désigne par $e(X, Y)$ le nombre d'arêtes de G reliant X à Y. Si $|X| = |Y| = n/2$, on dira que (X, Y) définit une bissection de G. La valeur minimum d'une bissection de G, notée $Bi(G)$, est définie par

$$Bi(G) = \min_{(X,Y)} e(X, Y)$$

où (X,Y) parcours toutes les partitions de $V(G)$ avec $|X| = |Y| = n/2$. On s'interesse maintenant à la fonction $Bi(G)$ lorsque G est le graphe aléatoire $G_{n,1/2}$.

La coupe maximum

On veut maintenant obtenir deux sous-ensembles de sommets V_1 et V_2, qui ne sont pas nécessairement de la même taille, et tels que le nombre d'arêtes entre ces deux ensembles (c'est à dire la *taille* de la coupe) $e(V_1, V_2)$ soit maximum.On désignera par $mc(G)$ la taille maximum d'une coupe de G:

$$mc(G) = \max_{(V_1,V_2)} e(V_1, V_2)$$

où (V_1, V_2) parcours toutes les bipartitions de V.

Dans ce chapitre on va aussi introduire la notion de *coupe maximum équilibrée*. La coupe maximum équilibrée est définie comme la coupe maximum, mais on ajoute la condition que les deux sous-ensembles de sommets aient la même cardinalité. Une telle coupe sera notée $mc_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(G)$, en prenant les mêmes notations que précédemment avec en plus $|V_1| = |V_2|$.

De même, le *déséquilibre* d'une coupe est la différence de cardinal des deux parties constituant cette coupe.

4.1 Une borne inférieure pour la bissection d'un graphe aléatoire

Rappelons que $G_{n,1/2}$ est un graphe aléatoire à n sommets et de probabilité d'arête 1/2.Soient $G = G_{n,1/2}$, $V = V(G)$ et $E = E(G)$. Soit une partition de V en deux ensembles de même taille X et Y. On veut calculer la taille $e(X,Y)$ de la bissection correspondante. Celle-ci est égale à:

$$e(X,Y) = \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} 1_{\{xy \in E\}}$$

où xy représente l'arête entre les sommets x et y. On calcule maintenant l'espérance mathématique de $e(X,Y)$ pour X et Y fixés:

$$E[e(X,Y)] = E[\sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} 1_{\{xy \in E\}}] = \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} E[1_{\{xy \in E\}}] = \frac{n^2}{8}.$$

Cela entraine immédiatement qu'il existe au moins une partition (X,Y) avec $e(X,Y) \leq n^2/8$. Le vrai problème est de trouver un équivalent asymptotique de la différence $n^2/8 - Bi(G)$.

Chaque arête ayant une probabilité 1/2, on a $E[1_{\{xy \in E\}}] = 1/2$. De plus, $|X| = |Y| = n/2$ donc la somme de l'espérance se fait sur $\frac{n^2}{4}$ éléments, ce qui justifie le résultat $E[e(X,Y)] = \frac{n^2}{8}$. D'autre part, $e(X,Y)$ est la somme de $\frac{n^2}{4}$ variables aléatoires qui valent 0 ou 1 avec la probabilité 1/2. Sa loi est donc une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(\frac{n^2}{4}, \frac{1}{2})$.

On va montrer que, avec une grande probabilité, la taille de la bissection est supérieure à $\frac{n^2}{8} - \frac{\lambda n}{4}$pour un certain λ que l'on va calculer. Ce calcul se fait par la méthode du premier moment que l'on a vue au chapitre 1. Pour cela, on va calculer λ tel que $E[\#(X,Y) : e(X,Y) \leq \frac{n^2}{8} - \frac{\lambda n}{4}]$ soit plus petit que 1. Cette espérance compte bien le nombre de partitions (X,Y) vérifiant $e(X,Y) \leq \frac{n^2}{8} - \frac{\lambda n}{4}]$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
E[\#(X,Y):e(X,Y)\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}] &= E[\sum_{(X,Y)} 1_{\{e(X,Y)\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}\}}] \\
&= \sum_{(X,Y)} E[1_{\{e(X,Y)\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}\}}] \\
&= \sum_{(X,Y)} \Pr[e(X,Y)\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}]
\end{aligned}$$

(On somme ici à chaque fois sur tous les couples (X,Y) possibles).

Par ailleurs le théorème centrale limite permet d'approximer une loi de Bernouilli par une loi normale avec des coefficients appropriés. Or, pour tout (X,Y), on a vu que la loi de $e(X,Y)$ a pour loi $\mathcal{B}(\frac{n^2}{4},\frac{1}{2})$. Ainsi, on peut l'approximer par la loi suivante: $\mathcal{N}(\frac{n^2}{8},\frac{n^2}{16})$. Cela permet de remplacer $\Pr[e(X,Y)\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}]$ par $\Pr[\mathcal{N}(\frac{n^2}{8},\frac{n^2}{16})\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}]$. Cette probabilité est facilement majorable,

$$\begin{aligned}
\Pr[\mathcal{N}(\frac{n^2}{8},\frac{n^2}{16})\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}] &= \Pr[\frac{n^2}{8}+\frac{n}{4}\mathcal{N}(0,1)\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}] \\
&= \Pr[\mathcal{N}(0,1)\leq -\lambda] \\
&\leq e^{-\frac{\lambda^2}{2}}
\end{aligned}$$

On remplace alors dans la formule de l'éspérance qui a été établie plus haut:

$$\begin{aligned}
E[\#(X,Y):e(X,Y)\leq \frac{n^2}{8}-\frac{\lambda n}{4}] &= \sum_{(X,Y)} \Pr[\mathcal{N}(0,1)\leq -\lambda] \\
&\leq \sum_{(X,Y)} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \\
&\leq 2^n e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \\
&\leq e^{-\frac{\lambda^2}{2}+n\ln 2}
\end{aligned}$$

Le facteur multiplicatif 2^n correspond à un majorant du nombre de partitions (X,Y) possibles.

On cherche maintenant une valeur de λ telle que l'espérance vue précédemment soit inférieure à 1. On prend alors λ tel que

$$e^{-\frac{\lambda^2}{2}+n\ln 2}=1$$

c'est à dire

$$\lambda=\sqrt{2\ln 2}\sqrt{n}$$

On déduit alors de tout ce calcul, en notant $Bi(G)$ la bissection optimale du graphe $G = G_{n,1/2}$, que l'on a presque surement,

$$Bi(G) \geq \frac{n^2}{8} - \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\sqrt{2}} n^{3/2} + o(n^{3/2}) \tag{4.1}$$

Si on calcule une valeur approchée de $\frac{\sqrt{\ln 2}}{2\sqrt{2}}$ alors on trouve 0,2943 ce qui vaut $0,7714 \times 0,3816$, avec 0,3816 qui est la valeur trouvée grâce à la méthode des spin glasses (voir la partie 3.2). Le résultat donné par la méthode du premier moment n'est donc probablement pas le meilleur possible.

4.2 Relation avec la coupe maximum

Nous allons aborder maintenant le problème de la coupe maximum en montrant que si la coupe n'est pas trop déséquilibrée, le résultat trouvé précédemment pour la bissection permet d'estimer la coupe. Pour cela on va d'abord montrer que l'estimation de la bissection donne une estimation de la coupe maximum équilibrée, puis que si le déséquilibre de la coupe maximum n'est pas trop important, alors on peut approximer la coupe maximum par la coupe équilibrée.

4.2.1 Majoration de la coupe équilibrée

Il est clair que s (X,Y) définit une bissection de taille minimum de G, (X,Y) définit aussi une coupe équilibrée maximum du graphe complémentaire. Comme la distribution de $G_{n,1/2}$ est invariante par passage au complémentaire, et que la taille minimum d'une bissection satisfait $Bi(G) \geq \frac{n^2}{8} - \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\sqrt{2}} n^{3/2} + o(n^{3/2})$, on en déduit le théorème suivant:

Théorème 4.1 *La coupe maximum équilibrée d'un graphe aléatoire $G_{n,1/2}$ vérifie presque sûrement*

$$mc_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}(G_{n,1/2}) \leq \frac{n^2}{8} + \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\sqrt{2}} n^{3/2} + o(n^{3/2})$$

On a ainsi obtenu une borne supérieure de la valeur de la coupe équilibrée maximum. On va maintenant utiliser ce résultat pour estimer la valeur d'une coupe maximum non équilibrée.

4.2.2 Estimation de la coupe maximum

Afin d'estimer la coupe maximum nous allons procéder en deux étapes.

a) On montre tout d'abord que le déséquilibre d'une coupe maximum est presque surement infèrieur à $n^{3/4}$.

b) On montre que de toute coupe de déséquilibre $\delta \leq n^{3/4}$, on peut déduire une coupe équilibrée du même graphe avec une diminution de valeur qui est $o(n^{3/2})$.

Pour montrer a), rappelons que étant donné un graphe G et S, T deux sous-ensembles de sommets de G disjoints, on note $e(S,T)$ le nombre d'arêtes existant entre les ensembles S et T.

Soit un graphe $G = (V(G), E(G))$ à n sommets, pris dans le modèle A de graphes aléatoires. Soit une coupe (X,Y) de G fixée avec $|X| = n/2 - n^{3/4}$ et $|Y| = n/2 + n^{3/4}$. Le nombre d'arêtes possibles entre ces deux ensembles est $n^2/4 - n^{3/2}$. Le nombre d'arêtes existant entre X et Y, $e(X,Y)$ suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n^2/4 - n^{3/2}, 1/2)$. En utilisant B.1, on obtient alors

$$\begin{aligned} \Pr\left[e(X,Y) > \frac{n^2}{8}\right] &\leq \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(n^{3/2}/2)^2}{n^2/8}\right) \\ &\leq \exp(-n) \end{aligned}$$

On peut alors appliquer la méthode du premier moment ce qui donne:

$$\begin{aligned} E\#\left\{(X,Y) : e(X,Y) > \frac{n^2}{8}\right\} &= \#\{(X,Y)\} \Pr\left[e(X,Y) > \frac{n^2}{8}\right] \\ &\leq 2^n \exp(-n) \\ &\leq \exp(-n(1-\ln 2)) \end{aligned}$$

Cette fonction tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ceci montre que la probabilité pour qu'il existe une coupe avec $e(X,Y) > n^2/8$ tend vers 0 comme voulu (on démontre ici davantage que ce dont on a besoin).

Pour montrer b), considérons un graphe aléatoire $G_{n,1/2}$, dont la coupe maximum est constituée de 2 ensembles X et Y tel que $|X| = n/2 + \delta$ et $|Y| = n/2 - \delta$ avec $\delta \leq n^{3/4}$. Soit Z une partie aléatoire de X avec $|Z| = \delta$. On va montrer que les arêtes ayant une extrémité dans Z influent très peu dans la valeur de la coupe. Plus précisément, on montre que:

$$e(Z, X-Z) - e(Z,Y) = o(n^{3/2}) \tag{4.2}$$

On cherche les lois des différentes variables aléatoires. On sait que $|Z| = \delta$, $|X - Z| = n/2$ et $|Y| = n/2 - \delta$, de plus chaque arête existe avec une probabilité égale à $1/2$. La variable aléatoire $e(Z, X-Z)$ suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(\frac{\delta n}{2}, \frac{1}{2})$. De même la variable aléatoire $e(Z,Y)$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(\delta(\frac{n}{2} - \delta), \frac{1}{2})$.

En utilisant les inégalités de grandes déviations (voir annexe B, nous omettons les détails) on obtient les inégalités suivantes avec une probabilité tendant vers 1,

$$e(Z, X-Z) \leq \frac{\delta n}{4} + \left(n - \frac{\delta n}{4}\right)$$

et

$$e(Z,Y) \geq \frac{\delta}{2}\left(\frac{n}{2}-\delta\right) - \left(n + \frac{\delta}{2}\left(\frac{n}{2}-\delta\right)\right).$$

D'où, il vient immédiatement

$$e(Z, X - Z) - e(Z, Y) \leq 2n$$

On a ainsi montré que l'on a avec une probabilité proche de 1 l'estimation:

$$e(Z, X - Z) - e(Z, Y) = o(n^{3/2})$$

Comme on a

$$e(X - Z, Y + Z) = e(X, Y) + e(Z, X - Z) + e(Z, Y)$$

il en résulte que la valeur de la coupe équilibrée $(X - Z, Y + Z)$ diffère de celle de (X, Y) d'une quantité $o(n^{3/2})$ comme désiré. D'où le théorème:

Théorème 4.2 *Avec grande probabilité, la valeur de la coupe maximum de $G_{n,1/2}$ est approximée par la valeur de la coupe maximum équilibrée, à un terme additif en $o(n^{3/2})$ près.*

4.3 Un algorithme de bissection

On va désormais s'interesser à un algorithme que l'on appelle $ALBI$ permettant d'effectuer une bissection de graphe. Cet algorithme est du type "glouton". On va d'abord décrire cet algorithme puis on effectuera une analyse en moyenne de celui-ci qui nous donnera une borne supérieure pour $Bi(G)$ quand G est distribué comme $G_{n,1/2}$.

Introduisons d'abord les notations dont on va se servir. Soit m un entier, et V un ensemble de points de cardinal égal à $2m^2$. Soit G un graphe dont V est l'ensemble des sommets, et E l'ensemble des arêtes, E est quelconque. Donc avec les notations du chapitre 1, $G = (V(G), E(G))$. On va partitionner $V(G)$ en m sous-ensembles $V_1, \ldots, V_m$, tels que pour tout i, $1 \leq i \leq m$, on ait $|V_i| = 2m$. Et enfin, dans la suite, $\Gamma(x)$ dénotera l'ensemble des sommets dont l'une des arêtes incidente est issue de x, et rappelons que si $K, L \subset V$ alors $e(K, L)$ est le nombre d'arêtes entre K et L c'est à dire $e(K, L) = \sum_{x \in K} |\Gamma(x) \cap L|$.

L'algorithme $ALBI$ etant compliqué, nous allons commencer par présenter un algorithme de bissection plus simple. D'abord on place aléatoirement $n/4$ éléments de $V(G)$ dans un ensemble A et $n/4$ éléments de $V(G)$ dans un ensemble B. Il reste $n/2$ éléments à placer pour obtenir la bissection (A, B). On va le faire comme suit, on considére chaque élément x de $V - (A \cup B)$

et on le place dans A si $e(x,B) \leq e(x,A)$, sinon on le place dans B. On peut tout de suite se rendre compte que cet algorithme ne donne pas une coupe équilibrée en général. De plus, intuitivement, le résultat serait sans doute meilleur si les ensembles A et B étaient construits de manière plus progressive. Aussi, afin de prendre en compte ces remarques, on présente maintenant l'algorithme $ALBI$.

Le but de l'algorithme $ALBI$ est de partitionner l'ensemble V en deux sous-ensembles X et Y contenant le même nombre d'éléments et tels que le nombre d'arêtes entre ces deux sous-ensembles soit minimal. Pour cela, on va construire les ensembles X et Y par étapes. A chaque étape i $(1 < i \leq m)$ on va partitionner l'ensemble V_i en deux sous-ensembles de même taille X_i et Y_i. Si on pose, pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$, $A_i = \cup_{k=1}^{i} X_k$ et $B_i = \cup_{k=1}^{i} Y_k$, on va construire X_i et Y_i de façon à minimiser le nombre d'arêtes entre X_i et B_{i-1} et celui entre Y_i et A_{i-1}. Ainsi, à priori, le résultat obtenu sera meilleur que si on divise aléatoirement l'ensemble des sommets.

On va maintenant voir l'algorithme. Dans celui-ci, les ensembles V_k, X_k, Y_k, A_k, B_k seront notés respectivement `V[k]`,`X[k]`, `Y[k]`, `A[k]` et `B[k]`. On va aussi considérer une famille d'ensembles Z_k qui seront appelés `Z[k]`, δ une fonction de k qui sera explicitée ultèrieurement et notée `d`. Avec ces notations, l'algorithme est alors:

```
Pour k=1 à m
   initialiser X[k], Y[k], Z[k], A[k] et B[k] à l'ensemble vide;

Pour k=1 à m
début
   choisir aléatoirement x dans V;
   X[1]←X[1]∪x;
fin;
Y[1]←V[1]-X[1];
A[1]←X[1];
B[1]←Y[1];

Pour k=2 à m
début
   On choisit aléatoirement d éléments de V[k] que l'on place
dans Z[k];
   Pour tout élément x de V[k]-Z[k]
   début
    Si |Γ(x)∩A[k-1]|-|Γ(x)∩B[k-1]|>0 alors X[k]←X[k]∪x;
    Si |Γ(x)∩A[k-1]|-|Γ(x)∩B[k-1]|<0 alors Y[k]←Y[k]∪x;
    Si |Γ(x)∩A[k-1]|-|Γ(x)∩B[k-1]|=0 alors x[k]←x ou Y[k]←x
avec probabilité 1/2;
```

```
    fin;
    On équilibre X[k] et Y[k] avec les éléments de Z[k];
    A[k]←A[k-1]∪X[k];
    B[k]←B[k-1]∪Y[k];
fin.
```

Après la phase d'initialisation, on partage aléatoirement l'ensemble V_1 en deux ensembles de même taille. Ensuite, pour k compris entre 2 et m, on partage V_k en trois sous-ensembles X_k, Y_k et Z_k de la manière décrite dans l'algorithme. On calculera plus tard la valeur de δ qui permet d'obtenir un ensemble Z_k suffisament grand pour équilibrer X_k et Y_k avec une probabilité proche de 1. On va dans un premier temps supposer que $\delta = \sqrt{m} \log m$ convient et ainsi on va finalement obtenir des ensembles X_k et Y_k de même cardinal. Il est alors évident que l'on va ainsi obtenir deux ensembles $X = A_m$ et $Y = B_m$ qui sont de la même taille et ainsi, on a réalisé une coupe équilibrée. On veut maintenant avoir une éstimation du nombre d'arêtes $Bi(X,Y)$ entre X et Y (c'est à dire la coupe de la partition). Pour cela on va calculer l'espérance de la coupe de la partition obtenue en prenant comme modèle probabiliste le modèle A du chapitre 1.

Dans cet algorithme, on ajoute à chaque étape k les ensembles X_k et Y_k aux ensembles A_{k-1} et B_{k-1}, ainsi on peut exprimer la valeur de la coupe $Bi(X,Y)$ comme suit:

$$Bi(X,Y) = \sum_{k=2}^{m} [e(X_k, B_{k-1}) + e(Y_k, A_{k-1})] + \sum_{k=1}^{m} e(X_k, Y_k)$$

On notera $C_1 = \sum_{k=2}^{m} [e(X_k, B_{k-1}) + e(Y_k, A_{k-1})]$ et $C_2 = \sum_{k=1}^{m} e(X_k, Y_k)$. Ainsi, $Bi(X,Y) = C_1 + C_2$ et grâce à la linéarité de l'espérance mathématique on a aussi $EBi(X,Y) = EC_1 + EC_2$. C_1 représente le nombre d'arêtes entre les sommets que l'on considère à l'étape k avec ceux qui ont été considérés aux étapes précédentes, et ceci pour tout les k. C_2 est la somme de toutes les arêtes qui existent entre X_k et Y_k pour tout k.

D'autre part, on remarque que pour un graphe quelconque du modèle A, si M et N sont des sous-ensembles disjoints de l'ensemble des sommets du graphe tels que $|M| = a$ et $|N| = b$ alors la variable aléatoire $e(M,N)$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(ab, 1/2)$. En effet, il y a ab arêtes possibles entre les ensembles M et N, chacune existe avec la probabilité $1/2$ et contribue à la valeur de $e(M,N)$ en valant 0 ou 1. La loi est donc bien celle anoncée.

De plus, on peut, grâce au théorème centrale limite, approximer une loi binomiale $\mathcal{B}(ab, 1/2)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\frac{ab}{2}, \frac{ab}{4})$.

On peut alors calculer tout de suite EC_2, en effet, d'après ce qui précède, pour tout k, la loi de $e(X_k, Y_k)$ est une loi $\mathcal{B}(m^2, 1/2)$ ($|X_k| = |Y_k| = m$) et donc

$$EC_2 = \frac{m^3}{2}.$$

On va maintenant calculer EC_1. On écrit à cet effet $V_k = U_k + Z_k$ pour tout k. Il faut alors estimer les contributions de U_k et de Z_k à la valeur de la coupe. Cela revient en fait à calculer le nombre d'arêtes entre U_k et un ensemble contenant km éléments (ce nombre à une loi qui sera explicitée plus tard) et le nombre d'arêtes entre Z_k et un ensemble contenant km éléments. Cela permet de ne pas compter 2 fois les différentes arêtes. On a ainsi:

$$EC_1 = \sum_{k=1}^{m-1} \left[Ee(U_{i+1}, B_i) + Ee(Z_k, B_{i-1}) \right]$$

D'autre part, soit k tel que $1 \leq k \leq m-1$, et x un élément de V_{k+1}. Alors les lois de $e(x, A_k)$ et de $e(x, B_k)$ sont toutes les deux de la forme $\mathcal{B}(km, 1/2)$ que l'on approchera par $\mathcal{N}(\frac{km}{2}, \frac{km}{4})$. L'algorithme place x de telle manière que $e(U_{k+1}, B_k)$ et $e(U_{k+1}, A_k)$ soient minimisés. Ainsi ces variables ont la même loi que la variable aléatoire $\min(\alpha, \beta)$, où α et β sont deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(\frac{km}{2}, \frac{km}{4})$. Or

$$E \min(\alpha, \beta) = \frac{km}{2} + \frac{\sqrt{mk}}{2} E \left[\min \mathcal{N}_\infty, \mathcal{N}_\in \right]$$

avec $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}_\in$ qui sont deux variables aléatoires de loi normale standard et ainsi d'après l'égalité C.1, $E\left[\min \mathcal{N}_\infty, \mathcal{N}_\in\right] = -1/\sqrt{2\pi}$. Ainsi, on peut en déduire que

$$\begin{aligned}
EC_1 &= (2m - \sqrt{m}\log m) \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{km}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sqrt{km}}{2\sqrt{2\pi}} \right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{km\delta}{2} \\
&= (2m - \sqrt{m}\log m) \left[\frac{m(m-1)}{2}\frac{m}{2} - \frac{m^2}{3\sqrt{2\pi}} \right] + \frac{m(m-1)}{2}\frac{m\delta}{2} + o(m^3) \\
&= \frac{m^4}{2} - m^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \right) + o(m^3)
\end{aligned}$$

car on peut approximer $\sum_{k=1}^{m} \sqrt{k}$ par $\int_0^m x^{1/2} dx = \frac{2}{3} m^{3/2}$. De tout cela, on déduit alors:

$$EBi(X, Y) = \frac{m^4}{2} - \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} m^3 + o(m^3)$$

Si on veut garder des notations plus traditionnelles et que l'on pose $n = 2m^2$, alors le résultat obtenu devient

$$EBi(X, Y) = \frac{n^2}{8} - \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} n^{3/2} + o(n^{3/2})$$

c'est à dire

$$EBi(X, Y) = \frac{n^2}{8} - 0,2659 n^{3/2} + o(n^{3/2})$$

Comme l'on pouvait s'y attendre, le terme multiplicatif de $n^{3/2}$ est en valeur absolue plus petit que les termes qui ont été trouvés précédemment. Toutefois il n'en est pas trop éloigné car il vaut 0,9037 fois le terme trouvé en 4.1.

Il reste maintenant à justifier le choix qui a été fait pour la valeur de δ. Soit k tel que $1 < k \leq m$ une étape de l'algorithme. On cherche une valeur de δ telle que lorsque que l'on a tiré δ sommets aléatoirement dans $V_k$et réparti les sommets restant dans X_k et Y_k, on n'ait pas (ou avec très faible probabilité) les évènements suivant:

$$|X_k| > m \quad \text{et} \quad |Y_k| > m \ .$$

Après avoir retiré δ sommets de V_k, il en reste $2m - \delta$, et chacun peut aller dans X_k ou dans Y_k avec la probabilité $1/2$. En effet, la destination de chaque sommet dépend du nombre d'arêtes entre celui-ci et A_{k-1} et du nombre d'arêtes entre ce sommet et B_{k-1}. Or ces deux quantités sont symétriques donc la probabilité d'aller dans X_k ou dans Y_k est bien de $1/2$. De ceci, on déduit que $|X_k|$ et $|Y_k$ suivent tous deux une loi binomiale $\mathcal{B}(2m-\delta, 1/2)$. On peut donc appliquer une inégalité de grande déviation telle que l'inégalité B.1. On obtient alors, sachant que la moyenne de $|X_k|$ est $m - \delta/2$,

$$\begin{aligned} \Pr\left[|X_k| > m\right] &= \Pr\left[|X_k| - m + \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2}\right] \\ &\leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{8m}\right) \end{aligned}$$

Or on veut que cette quantité tende vers 0 quand m tend vers l'infini, ce que l'on obtient bien en prenant

$$\delta = \sqrt{m} \log m$$

On remarque ensuite que on a exactement le même résultat pour $|Y_k|$, donc cette valeur de δ convient bien.
Ainsi, on a montré que avec grande probabilité l'algorithme marche et donc on obtient bien une bissection du graphe d'entrée.

Finalement, on a montré le théorème suivant:

Théorème 4.3 *L'algorithme ALBI, appliqué à un graphe aléatoire $G = G_{n,1/2}$, détermine presque sûrement une bissection équilibrée de G dont la valeur est infèrieure à*

$$\frac{n^2}{8} - 0,2659n^{3/2}$$

Ce théorème donne de façon évidente une borne supérieure de la valeur de la bissection minimum $Bi(G)$, ainsi

$$EBi(G) \leq \frac{n^2}{8} - 0,2659n^{3/2} + o(n^{3/2})$$

Rappelons que la méthode des répliques donne

$$EBi(G) \leq \frac{n^2}{8} - 0,3816n^{3/2} + o(n^{3/2}).$$

Annexe A

Formule de Stirling

Dans les calculs, afin d'approximer $\binom{n}{k}$ on utilise fréquemment la *formule de Stirling*. Celle-ci peut être exprimée de diverses façons. Ainsi, la formule montrée par Robbins (1955) est:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ e^{\alpha_n}$$

avec $\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$.

Mais la forme généralement utilisée de la formule de Stirling est la forme suivante, plus faible:

$$n! = [1 + o(1)] \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{A.1}$$

Cette formule a été établie au début du 18^{eme} siècle par James Stirling. La démonstration de cette formule peut être trouvée dans la plupart des livres d'analyse. La première étape consiste à obtenir une borne infèrieure et une borne supérieure pour $\log n!$ en approximant l'intégrale $\int_1^n \log x \ dx$ grâce à des sommes de trapèzes inscrits et circonscrits. On montre ainsi que:

$$\exists c > 0 \quad \text{tel que} \quad n! = [1 + o(1)] c\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{A.2}$$

Enfin, par une intégration des intégrales de Wallis qui sont de la forme: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ on obtient:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)} \tag{A.3}$$

On obtient alors la constante c en substituant A.2 dans A.3.

Annexe B

Inégalités de grandes déviations

On donne ici des inégalités de base de grandes déviations qui sont utiles pour majorer les probabilités. Ces résultats proviennent de [7].

Théorème B.1 *Soit* $X_i, 1 \leq i \leq n$*, une famille de variables aléatoire indépendantes identiquement distribuées de loi:*

$$p\,\Pr(X_i = 0) = \frac{1}{2} \quad \mathit{et} \quad \Pr(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

et si on pose, comme habituellement,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n.$$

Soit $\alpha > 0$*, alors*

$$\Pr(S_n - ES_n > \alpha) < e^{-\frac{\alpha^2}{2n}}. \tag{B.1}$$

Dans la preuve, on utilise l'inégalité de Markov qui établit que: si Y est une variable aléatoire positive, et a un réel non nul, alors

$$\Pr(Y > aEY) < \frac{1}{a}.$$

On peut maintenant montrer le théorème B.1:

preuve: Soient n et α, et soit $\lambda > 0$ arbitraire. Pour $1 < i < n$,

$$E[e^{\lambda(X_i - \frac{1}{2})}] = \frac{e^{\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2} = \cosh(\frac{\lambda}{2})$$

D'autre part on sait que

$$e^{\lambda(S_n - ES_n)} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda(X_i - \frac{1}{2})}.$$

Comme les X_i sont indépendants, les $e^{\lambda(X_i-\frac{1}{2})}$ le sont aussi et donc on obtient:

$$E[e^{\lambda(S_n-ES_n)}]=\prod_{i=1}^{n}E[e^{\lambda(X_i-\frac{1}{2})}]=[\cosh(\lambda)]^n<e^{\frac{\lambda^2 n}{2}}.$$

car on a $\cosh(\lambda)\leq e^{\frac{\lambda^2 n}{2}}$. De plus, on remarque que $S_n-ES_n>\alpha$ si et seulement si $e^{\lambda(S_n-ES_n)}>e^{\lambda\alpha}$. On applique alors l'inégalité de Markov, et ainsi,

$$\Pr[S_n-ES_n>\alpha]=\Pr[e^{\lambda(S_n-ES_n)}>e^{\lambda\alpha}]\leq\frac{E[e^{\lambda(S_n-ES_n)}]}{e^{\lambda\alpha}}\leq e^{\frac{\lambda^2 n}{2}-\lambda\alpha}.$$

Afin d'optimiser l'inégalité on pose $\lambda=\frac{\alpha}{n}$ et on obtient:

$$\Pr[S_n-ES_n>\alpha]<e^{-\frac{\alpha^2}{2n}}.$$

Cela finit de démontrer le théorème. □

On vient de voir ici une version faible de cette inégalité qui est celle dont on se sert principalement dans ce texte. La version forte de cette inégalité est la suivante:

Théorème B.2 *Soient a et p des nombres réels. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires de même loi. Pour tout i, $\Pr[X_i=1]=p$ et $\Pr[X_i=0]=1-p$. On pose $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, alors*

$$\Pr[S_n-np>an]<\exp(-\frac{a^2 n}{2}). \tag{B.2}$$

Ce théorème se démontre de la même façon que le précédent.

Annexe C

Minimum de deux lois normales

Soient deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On sait que la quantité $\min(X,Y)$ est aussi une variable aléatoire et on va calculer son espérance mathématique. On veut donc calculer

$$E\left[\min(X,Y)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$$

ou encore

$$\begin{aligned}
E\left[\min(X,Y)\right] &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x1_{x<y}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy\right.\\
&\quad\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y1_{x>y}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x1_{x<y}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy.
\end{aligned}$$

car par symétrie, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x1_{x<y}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y1_{x>y}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$$

Afin de caculer cette intégrale, nous allons effectuer un changement de variable. Celui-ci est illustré par la figure C.1. On le définit formellement ainsi:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{u+v}{\sqrt{2}}\\ y &=& \frac{-u+v}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Alors l'intégrale devient, après avoir effectué ce changement de variables:

$$\begin{aligned}
E\left[\min(X,Y)\right] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{-u+v}{\sqrt{2}}e^{-\frac{u^2}{2}}e^{-\frac{v^2}{2}}dudv\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}\int_{0}^{+\infty}(-u+v)e^{-\frac{u^2}{2}}dudv
\end{aligned}$$

FIG. C.1 -

Or on sait que

$$\int_0^{+\infty} ve^{-\frac{u^2}{2}} du = v\sqrt{\pi}$$

et une integration simple donne le rśultat suivant:

$$\int_0^{+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

De tout cela, on peut déduire

$$\begin{aligned} E\left[\min(X, Y)\right] &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (v\sqrt{\pi} - 1) e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ve^{-\frac{v^2}{2}} dv - \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$E\left[\min(X, Y)\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tag{C.1}$$

pour X et Y des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Bibliographie

[1] D. Angluin and L. G. Valiant. Fast probabilistic algorithms for hamilton circuits and matchings. *Journal of Computer and System Science*, 18:155–193, 1979.

[2] B. Bollobàs. The evolution of random graphs. In B. Bollobàs, editor, *Graph Theory and Combinatorics*, Proc. Cambridge Combinatorics Conference in Honour of Paul Erdös, pages 35–57. Academic Press, 1984.

[3] B. Bollobàs. *Random Graphs.* Academic Press, 1985.

[4] B. Bollobàs, T. I. Fenner, and A. M. Frieze. An algorithm for finding hamilton paths and cycles in random graphs. *Combinatorica*, 7:327–341, 1987.

[5] R. Boppana. Eigenvalues and graph bisection: an average case analysis. In *Proceedings of the 28th Annual IEEE Symposium on the Foundation of Computer Science*, pages 327–342, 1987.

[6] T. Bui, S. Chaudhuri, T. Leighton, and M. Sipser. Graph bisection with good average case behaviour. *Combinatorica*, 7:171–192, 1987.

[7] H. Chernoff. *A measure of the asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, volume 23. Annals of mathematical statistics, 1952.

[8] D.Aldous. Asymptotics in the random assignement problem. *Probab. Theory Relat. Fields*, 93:507–534, 1992.

[9] M. Dyer, A. Frieze, and C. MacDiarmid. On linear programs with random costs. *Math. Program.*, 35:3–16, 1986.

[10] M. E. Dyer and A. M. Frieze. Fast algorithms for some random np-hard problems. *Journal of Algorithms*, 10:451–489, 1989.

[11] M. E. Dyer and A. M. Frieze. On patching algorithms for random asymetric travelling salesman problems. *Mathematical Programming*, 46:361–378, 1990.

[12] P. Erdös. Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51:898–902, 1947.

[13] P. Erdös. Graph theory and probability. *Canad. J. Math.*, 11:34–38, 1959.

[14] P. Erdös. Graph theory and probability ii. *Canad. J. Math.*, 13:344–352, 1961.

[15] P. Erdös and A. Rényi. On random graphs i. *Publ. Math. Debrecen.*, 6:290–297, 1959.

[16] P. Erdös and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 5:17–61, 1960.

[17] A. Frieze and C. McDiarmid. Algorithmic theory of random graphs. à paraitre.

[18] A. M. Frieze, R. M. Karp, and B. Reed. When is the assignment bound asymptotically tight for the asymetric traveling salesman problem? *SIAM Journal on Computing*, 24:484–493, 1995.

[19] M. X. Goemans and M. S. Kodialam. A lower bound on the expected cost of an optimal assignement . *Technical Report, Operation. Res. MIT*, 1989.

[20] M. R. Jerrum and G. Sorkin. Simulated annealing for graph bissection. In *Proceedings of the 34th IEEE on Foundation of Computer Science*, pages 94–103, 1993.

[21] R. Karp. An upper bound on the expected cost of an optimal assignement. In D. J. et al., editor, *Discrete algorithms and complexity: Proceedings of the Japan-U.S. Joint Seminar*, pages 1–4. New York: Academic Press, 1987.

[22] R. M. Karp. A patching algorithm for the non-symetric traveling salesman problem. *SIAM Journal of computing*, 8:561–573, 1979.

[23] R. M. Karp and J. M. Steele. Probabilistic analysis of heuristics. In E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. R. Kan, and D. B. Schmoys, editors, *The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization*. Wiley, 1985.

[24] M. Mézard and G. Parisi. A replica analysis of the travelling salesman problem. *J. Phys.*, 47:1285–1296, 1986.

[25] M. Mezard and G. Parisi. On the solution of the random link matching problem. *J. Phys. (Paris)*, 48:1451–1459, 1987.

[26] M. Mezard, G. Parisi, and M. Viraroso. *Spin glass theory and beyond.* World Scientific, 1987.

[27] L. Pòsa. Hamiltonian circuits in random graphs. *Discrete mathematics*, 14:359–364, 1976.

[28] F. Ramsey. On a problem of formal logic. In *Proceedings of the London Mathematics Society*, volume 30, pages 264–286, 1930.

[29] J. Steele. Probability and statistics in the service of computer science: illustrations using the assignement problem. *Commun. Stat., Theory Methods*, 19:4315–4329, 1990.

[30] D. Walkup. Matching in random regular bipartite digraphs. *Discrete Math.*, 31:59–64, 1980.